



دخترچه سوالات و پاسخ تشریحی مرحله اول

نوزدهمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل **۳۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

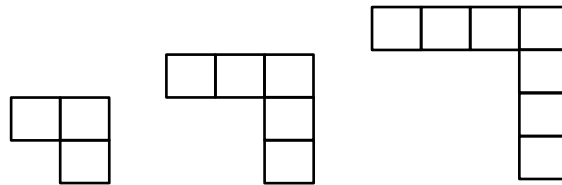
جدول اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & -1 \\
 & & & 1 & -1 & 1 \\
 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 & & & & & \vdots
 \end{array}$$

حاصل جمع کلیه سطرها از سطر اول تا سطر ۱۳۷۹ (با خود سطر ۱۳۷۹) برابر است با:

- الف) ۶۹۰ (ب) ۱ (ج) ۰ (د) ۱۳۷۹ (ه) ۶۸۹

شکل‌های زیر با چوب کبریت ساخته شده‌اند:



اگر ۵۰۰ تا چوب کبریت داشته باشیم، در شکل مشابهی که می‌توان ساخت چند مربع وجود دارد؟

- الف) ۱۶۷ (ب) ۱۶۶ (ج) ۱۶۵ (د) ۱۶۴ (ه) هیچ کدام

۴۰ توپ را با اعداد ۱ تا ۴۰ شماره‌گذاری کرده‌ایم. می‌خواهیم توپ‌ها را در تعدادی جعبه قرار دهیم به این ترتیب که اگر در یک جعبه توپی با شماره m قرار داده شده باشد، توپ دیگری با مضرب m را نمی‌توانیم در آن جعبه بگذاریم، حداقل چند تا جعبه برای قرار دادن همه توپ‌ها لازم است؟

- الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۱۲ (د) ۱۴ (ه) ۲۰

پنج نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض است، کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درباره مختصات وسط پاره‌خط‌های واصل بین این نقاط درست است؟

- الف) مختصات کلیه نقاط فوق‌الذکر نیز لزوماً صحیح است.
 ب) مختصات هیچ کدام لزوماً صحیح نیست.
 ج) حداقل مختصات یکی از نقاط صحیح است و نه لزوماً بیشتر.
 د) حداقل مختصات دو نقطه صحیح است و نه لزوماً بیشتر.
 ه) حداقل مختصات سه نقطه صحیح است و نه لزوماً بیشتر.

یک زوج $(a, b), a, b \in \mathbb{Z}$ خوب نامیده می‌شود اگر از هر مسیری از نقطه $(0, 2)$ حرکت کنیم و در هر مرحله روی شبکه مختصات یک واحد به بالا، پایین، چپ یا راست برویم و سرانجام به نقطه (a, b) برسیم دست کم یک بار از نقطه‌ای مثل (x, y) گذشته باشیم

که $xy - 4y^2 = x^2$ مربع کامل باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- الف) زوج $(2000, 1379)$ خوب است ولی زوج $(-1361, 765)$ خوب نیست.
 ب) زوج $(2000, 1379)$ و زوج $(-1361, 765)$ خوب هستند.
 ج) زوج $(2000, 1379)$ خوب نیست ولی زوج $(-1361, 765)$ خوب است.
 د) هیچ زوج خوبی وجود ندارد.
 ه) تعداد متناهی زوج خوب وجود دارد و حداقل یک زوج خوب وجود دارد.



۶- ماہ

تعداد اعداد طبیعی $n \leq 1379$ که به ازای آن‌ها عدد $n^2 + 2n^2$ مربع کامل باشد، چند تاست؟

- الف) ۱۶ (ب) ۶۴ (ج) ۴۹ (د) ۵۵ (ه) ۳۶

۷- ماہ

تعداد x های صحیح که در معادله زیر صدق می‌کنند چند تاست؟

$$\frac{x^3 + x}{x + 3} = 35$$

- الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) بی‌شمار

۸- ماہ

در مثلث $\triangle ABC$ ، B' قرینه B نسبت به ضلع AC و C' قرینه C نسبت به ضلع AB است. می‌دانیم که $B'C' = AB + AC$. زاویه $\angle A$ چند درجه است؟

- الف) 30° (ب) 40° (ج) 60° (د) 90° (ه) این زاویه یا 30° است و یا 60°

۹- ماہ

اعداد طبیعی x, y و n در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(i) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک x و y برابر با ۱۳۷۹ است.

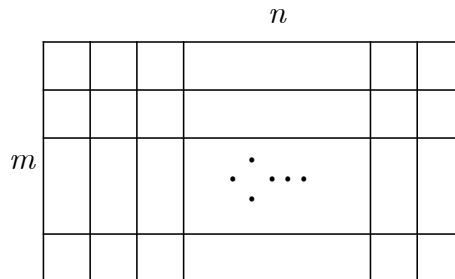
(ii) کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y برابر با $n!$ است.

$n(n! = 1 \times 2 \times \dots \times n)$ با کدام یک از اعداد زیر می‌تواند برابر باشد؟

- الف) ۲۷ (ب) ۶۴ (ج) ۱۲۵ (د) ۲۱۶ (ه) هیچ‌کدام

۱۰- ماہ

کارخانه «شکولات» شکلات کائوپی خوشمزه‌ای به شکل یک مستطیل شبکه‌بندی شده تولید کرده است. وقت خوردن، در هر گاز، یکی از خطوط افقی یا عمودی زیر دندان قرار می‌گیرد و می‌شکند. در نتیجه شکلات به دو مستطیل تقسیم می‌شود و یک قسمت آن خورده می‌شود، شخص با انتخاب کدام ابعاد برای شکلاتش می‌تواند در بیشترین تعداد گاز آن را بخورد؟



- الف) 32×35 (ب) 60×4 (ج) 33×34 (د) 3×80 (ه) 79×7

۱۱- ماہ

آیا اعداد طبیعی x_1, x_2, \dots, x_n و x_{n+1} وجود دارند که:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_{n+1}^2$$

الف) برای هر n ای اعداد x_1, \dots, x_n, x_{n+1} وجود دارند.

ب) به جز $n = 1, 2$ چنین اعدادی وجود ندارند.

ج) فقط برای هر n مربع کامل و $n = 1, 2$ چنین اعدادی وجود دارند.

د) فقط برای $n = 1$ و اعداد اول n چنین اعدادی وجود دارند.

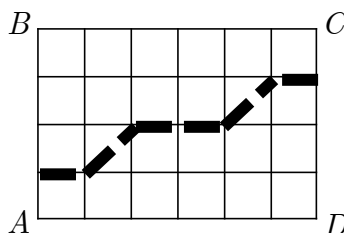
ه) هیچ‌کدام

- ۱۲- ماگ در مثلث ABC داریم $AB > AC$. دو نیم‌دایره به قطرهای AB و AC در خارج مثلث رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی امتداد ارتفاع‌های CH' و BH' را با نیم‌دایره‌های مزبور به ترتیب C' و B' می‌نامیم. کدام صحیح است؟
- (الف) همواره $AC' < AB'$ (ب) $AC' < AB'$ اگر و تنها اگر $\angle A$ حاده باشد.
 (ج) همواره $AC' > AB'$ (د) $AC' = AB'$ اگر و تنها اگر $\angle A$ حاده باشد.
 (ه) همواره $AC' = AB'$

- ۱۳- ماگ در مثلث حاده‌الزاویه ABC ، BD و CE به ترتیب ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AC و AB هستند. می‌دانیم $BC = 2DE$. زاویه $\angle A$ چند درجه است؟
- (الف) 60° (ب) 30° (ج) 45° (د) 30° یا 60° (ه) نمی‌توان زاویه $\angle A$ را مشخص کرد.

- ۱۴- ماگ یک جدول 9×9 از مربعات سفید موجود است. حداکثر مقدار n را بیابید که اگر به هر طریق ممکن n تا از خانه‌های جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان چهار خانه سفید متوالی عمودی یا افقی یافت.
- (الف) ۱۷ (ب) ۱۸ (ج) ۱۹ (د) ۲۰ (ه) ۲۱

- ۱۵- ماگ می‌خواهیم در شکل زیر از نقطه دلخواه روی ضلع AB به نقطه دلخواه روی ضلع CD برویم. فرض کنید تنها مجازیم دو نوع حرکت انجام دهیم، یک قدم افقی به سمت راست یا یک قدم مایل با زاویه 45° به سمت بالا-راست. به چند طریق این کار ممکن است؟



- (الف) ۱۲۶ (ب) ۱۲۷ (ج) ۱۲۸ (د) ۱۲۹ (ه) ۱۳۰

- ۱۶- ماگ یک فرش مربعی شکل 3×3 داریم که طرح روی آن 9 مربع 1×1 است. می‌خواهیم هر یک از مربع‌های 1×1 را با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم. چند فرش متفاوت با این خواص داریم؟ (اگر فرش را دوران دهیم، فرش جدیدی به‌وجود نمی‌آید!)
- (الف) ۱۲۰ (ب) 2^7 (ج) 2^8 (د) 2^9 (ه) ۱۴۰

- ۱۷- ماگ چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد به‌طوری‌که داشته باشیم:
- $$xyz = 2 + x + y + z, \quad xy + yz + zx = 12$$
- (الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۳ (د) ۶ (ه) ۱۲

- ۱۸- ماگ تمام پنج‌تایی‌های مرتب از اعداد طبیعی به‌صورت $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ را در نظر بگیرید که

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1$$

- در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد تعداد این پنج‌تایی‌های مرتب صحیح است؟
- (الف) تعداد آن‌ها متناهی است. (ب) فقط یک پنج‌تایی مرتب با خاصیت فوق وجود دارد.
 (ج) تعداد این پنج‌تایی‌ها بر ۵ بخش پذیر است. (د) تعداد این پنج‌تایی‌ها به‌صورت $5k + 1$ است که $k \geq 1$ است.
 (ه) هیچ کدام

۱۹- ماد بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر سه عدد حقیقی $a, b, c \geq 0$ داشته باشیم:

$$(a + b + c)^2(ab + bc + ca) \geq k(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

- (الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۹ (ه) ۱۲

۲۰- ماد دنباله‌ای از اعداد حقیقی به این شکل تعریف می‌شوند $x_1 = 8, x_2 = 3, x_n = 3x_{n-1} - 4x_{n-2}, n \geq 3$ به‌طور مثال: $x_3 = 4, x_4 = 12, \dots$

در بین ۲۰۰۱ جمله ابتدایی این دنباله از x_1 تا x_{2001} چند مضرب ۳ داریم؟

- (الف) ۹۹۹ (ب) ۱۰۰۰ (ج) ۱۰۰۱ (د) ۱۵۰۰ (ه) ۱۵۰۱

۲۱- ماد چند عدد صحیح $n \geq 2$ وجود دارد که به‌ازای هر n عدد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n گزاره شرطی زیر برقرار باشد؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leq 0$$

- (الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

۲۲- ماد در یک صفحه شطرنج 13×79 یک خانه را مناسب می‌نامیم، اگر با حذف آن خانه بتوان مابقی خانه‌های صفحه شطرنج را با موزاییک‌های 1×2 پر کرد. تعداد خانه‌های مناسب این صفحه شطرنج چندتاست؟ (موزاییک‌ها می‌توانند افقی یا عمودی قرار گیرند.)

- (الف) ۳۱۷ (ب) ۴۲۹ (ج) ۵۱۴ (د) ۶۲۰ (ه) ۷۱۶

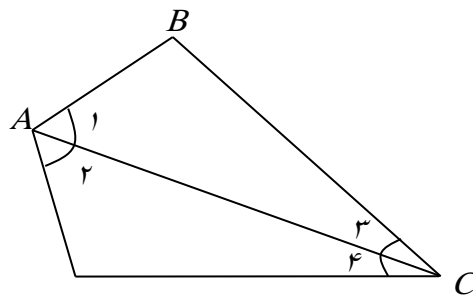
۲۳- ماد یک بازی ۷ نفره، بین امین، سلمان، علی، بابک، آرش، رضا و داود که به ترتیب دور یک دایره نشسته‌اند، انجام می‌شود. ابتدا هر کدام تعدادی کارت دارند. تعداد کل کارت‌های بین آن‌ها ۶ تاست. بازی از امین شروع می‌شود و به ترتیب سلمان، علی، ... رضا، داود، سلمان، ... بازی می‌کنند. در هر مرحله کسی که نوبتش است اگر بیش از یک کارت دستش باشد ۱ کارت را نگه می‌دارد و بقیه کارت‌ها را به کسی که نوبت بعدی را دارد می‌دهد. کسی که هیچ وقت کارتی به او نرسد برنده است. (اگر ۶ نفر دقیقاً ۱ کارت داشته باشند و نفر هفتم بدون کارت باشد با انجام بازی وضعیت تغییر نمی‌کند.) تعداد حالتی را بیابید که امین برنده شود.

- (الف) ۱۳۸ (ب) ۸۸ (ج) ۱۴۲ (د) ۱۳۲ (ه) ۱۳۰

۲۴- ماد کدام‌یک از اعداد زیر به صورت $a^2 - b^2, a, b \in \mathbb{Z}$ قابل بیان هستند؟

- (الف) ۱۶، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ (ب) ۱۶، ۲۰۰۱، ۹۸ (ج) ۱۴، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ (د) ۲۰۰۱، ۶۶، ۹۸ (ه) ۱۶، ۶۶، ۹۸

۲۵- ماد مساحت چهارضلعی زیر چقدر است اگر $\angle A_1 + \angle C_1 = 90^\circ$ و $\angle A_2 + \angle C_2 = 30^\circ$ و $AB = 4, BC = 8, CD = 9, DA = 5$.



- (الف) ۲۸ (ب) ۲۹ (ج) $18 + 10\sqrt{3}$ (د) $10 + 9\sqrt{3}$ (ه) $9 + 10\sqrt{3}$

۲۶- ماه فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد. تعداد جواب‌های طبیعی معادله $c^2 = b^2 + 2^{2k}$ چند تاست؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) k (د) $(k-1)^2$ (ه) $k-1$

۲۷- ماه تعداد جواب‌های معادله $3xy - y - 5x = 13$ که $x, y \in \mathbb{N}$ برابر است با

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) بی‌نهایت

۲۸- ماه چند عدد حقیقی مانند a وجود دارد که در معادله زیر صدق می‌کند؟

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a$$

(x) برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است.

- الف) ۱۰ (ب) ۱۵ (ج) ۳۰ (د) ۶۰ (ه) بی‌نهایت

۲۹- ماه یک عدد ۱۰ رقمی را جالب می‌گوییم اگر تمام ارقام آن متفاوت باشند و بر ۱۱۱۱۱ بخش‌پذیر باشد. چند عدد ۱۰ رقمی جالب وجود دارد؟

- الف) ۲۰۴۸ (ب) ۴۰۹۶ (ج) ۳۴۵۶ (د) ۳۸۴۰ (ه) هیچ‌کدام

۳۰- ماه عدد طبیعی n را یک عدد «مثلثی» می‌گوییم اگر بتوان هر مثلث دلخواه را به n مثلث متساوی‌الساقین افراز کرد (این n مثلث تنها می‌توانند روی محیط با هم اشتراک داشته باشند). کدام یک از اعضای مجموعه $۴, ۶, ۷, ۱۰$ مثلثی هستند؟

الف) هیچ‌کدام از این اعداد مثلثی نیستند. (ب) ۷

(ج) ۴، ۶ و ۱۰ (د) ۴

(ه) همه این اعداد مثلثی هستند.

«کلید سؤالات»

۱	هـ د ج ب	۲۱	الف هـ د ج	۴۱	الف هـ د ج ب
۲	الف هـ د ج ب	۲۲	الف هـ د ج ب	۴۲	الف هـ د ج ب
۳	الف هـ د ج ب	۲۳	الف هـ د ج ب	۴۳	الف هـ د ج ب
۴	الف هـ د ج ب	۲۴	الف هـ د ج ب	۴۴	الف هـ د ج ب
۵	الف هـ د ج ب	۲۵	الف هـ د ج ب	۴۵	الف هـ د ج ب
۶	الف هـ د ج ب	۲۶	الف هـ د ج ب	۴۶	الف هـ د ج ب
۷	الف هـ د ج ب	۲۷	الف هـ د ج ب	۴۷	الف هـ د ج ب
۸	الف هـ د ج ب	۲۸	الف هـ د ج ب	۴۸	الف هـ د ج ب
۹	الف هـ د ج ب	۲۹	الف هـ د ج ب	۴۹	الف هـ د ج ب
۱۰	الف هـ د ج ب	۳۰	الف هـ د ج ب	۵۰	الف هـ د ج ب
۱۱	الف هـ د ج ب	۳۱	الف هـ د ج ب	۵۱	الف هـ د ج ب
۱۲	الف هـ د ج ب	۳۲	الف هـ د ج ب	۵۲	الف هـ د ج ب
۱۳	الف هـ د ج ب	۳۳	الف هـ د ج ب	۵۳	الف هـ د ج ب
۱۴	الف هـ د ج ب	۳۴	الف هـ د ج ب	۵۴	الف هـ د ج ب
۱۵	الف هـ د ج ب	۳۵	الف هـ د ج ب	۵۵	الف هـ د ج ب
۱۶	الف هـ د ج ب	۳۶	الف هـ د ج ب	۵۶	الف هـ د ج ب
۱۷	الف هـ د ج ب	۳۷	الف هـ د ج ب	۵۷	الف هـ د ج ب
۱۸	الف هـ د ج ب	۳۸	الف هـ د ج ب	۵۸	الف هـ د ج ب
۱۹	الف هـ د ج ب	۳۹	الف هـ د ج ب	۵۹	الف هـ د ج ب
۲۰	الف هـ د ج ب	۴۰	الف هـ د ج ب	۶۰	الف هـ د ج ب